BASES DE COMPROBACIÓN

TESIS

presentada á la Junta Directiva de la

FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

Guillermo Valenzuela y Moreno

en el acto de su investidura de

Ingeniero Topógrafo

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 1893

GUATEMALA:
Encuadernación y Tipografía Nacional, Décima Calle Poniente, Números 29 y 31
1893

BASES DE COMPROBACIÓN

TESIS

presentada á la Junta Directiva de la

FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

Guillermo Valenzuela y Moreno

en el acto de su investidura de

Ingeniero Topógrafo

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 1893

GUATEMALA:
Encuadernación y Tipografía Nacional, Décima Calle Poniente, Números 29 y 31
1893

JUNTA DIRECTIVA.

PROPIETARIOS.

Decano	Ingeniero	Don	Claudio Urrutia.
Vocal 1º............	"	"	Juan B. Padilla.
Vocal 2º...........	"	"	Ramón Aceña.
Vocal 3º...........	"	"	Felipe Rodríguez.
Vocal 4º............	"	"	Luis C. Samayoa.
Secretario	"	"	Salvador G. Lobos.

SUPLENTES RESPECTIVAMENTE.

Ingeniero	Don	Francisco Vela.
"	"	Salvador Quezada.
"	"	Salvador G. Lobos.
"	"	Emilio Gómez Flores.
"	"	Fabián Ortiz.
"	"	Leopoldo Orellana.

TRIBUNAL

QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO.

Decano..............	Ingeniero	Don	Claudio Urrutia.
Vocal 3º............	"	"	Felipe Rodríguez.
Vocal 4º............	"	"	Luis C. Samayoa.
....	"	"	Antonio de Arcos.
Secretario	"	"	Salvador G. Lobos.

Sólo los candidatos son responsables de las doctrinas consignadas en las tesis. (Artículo 286 de la "Ley de Instrucción Pública.")

A MIS PADRES

Licenciado Antonio Valenzuela

..Y..

Clotilde Moreno de Valenzuela.

A MI ABUELA

Catárina Batres de Moreno.

Honorable Junta Directiva:

Los grandes trabajos geodésicos realizados en el mundo se han llevado á cabo por medio de enormes cadenas trigonométricas, cuyos triángulos sirvieron siempre para el cálculo, por partes, de los arcos de meridianos y paralelos hasta ahora medidos y para fijar, con exactitud, los puntos convenientes de las cartas geográficas levantadas sobre vastas superficies.

La Geodesia, ciencia fecunda de la cual derivan los importantísimos progresos que, desde Mechain y Delambre se han obtenido con su aplicación, á la vez que nos suministra procedimientos, teorías, etc. para el cálculo del canevás trigonométrico, nos proporciona también los medios de verificar los operaciones á fin de corregirlas y adquirir completa certeza de que sus errores, que es imposible eliminar por completo, estén comprendidos dentro de límites científicos.

El medio generalmente usado es el de medir una ó varias bases en el extremo de la red, opuesto á aquél en que se encuentra la otra base sobre que descansa y comparar sus medidas directas con los valores al efecto deducidos de los triángulos. Es evidente, que si esas operaciones fuesen rigurosamente exactas, las diferencias entre aquellas medidas y estos valores serían nulas; pero, como tal cosa sea irrealizable por causas y razones que no me es dado exponer aquí, voy á explicar la manera de corregir las observaciones cuando las mencionadas dif. rencias son muy pequeñas, por ser éste el único caso en que pueden admitirse.

Hasta la publicación de la teoría de Laplace, los métodos empleados se fundaban en consideraciones vagas é inciertas. La Comisión General de Pesos y Medidas de Francia, al calcular el arco de meridiano,

que une á Dunquerque con Barcelona, valiéndose al intento de los triángulos de Delambre, hacía la corrección de tal modo que, aunque no se alteraran ni las bases ni los ángulos, los azimuts sufrían una pequeña desviación hácia la mitad del arco y necesariamente daban dos valores diversos al lado del triángulo respectivo á este punto.

Como las bases se suponen generalmente bien medidas, son los ángulos los que deben soportar una pequeña alteración, hasta que los valores directos estén de acuerdo con los deducidos. Delambre, calculando el mismo arco, cambiaba los ángulos de un modo imperceptible; pero sin sujetarse á ningún método científico, cuya exactitud estuviese matemáticamente comprobada.

La teoría de Laplace, por el contrario: fundada en el "Cálculo de Probabilidades," no sólo da fórmulas para corregir, sino que aumenta los *pesos* de los resultados, á tal extremo, que las probabilidades de los errores son más rápidamente decrecientes y estos mismos errores menos probables. Además, permite rectificar la diferencia de longitud de las extremidades de una red, aumentando el *peso* del valor de dicha diferencia. Comenzaré, pues, por explicar esta teoría.

Imagínese sobre una esfera un gran arco de círculo $AA'A''$.......... y supóngase á su rededor la cadena de triángulos ACC', $CC'C''$, $C'C''C'''$, $C''C'''C''''$, ..., descansando sobre la base AC y en la que los lados CC', $C'C''$, $C''C'''$,............, cortan á dicho arco. Por medio de esos triángulos se ha deducido la longitud $AA'A''$...........

El error en la medida de un arco como el anterior es, según Laplace, de la forma

$$(0)\quad p\overline{\alpha} + q\overline{\beta} + p_1\overline{\alpha_1} + q_1\overline{\beta_1} + \dots\dots\dots$$

en la que $\overline{\infty} = \infty - \frac{1}{3}T$, $\overline{\beta} = \beta - \frac{1}{3}T$, $\overline{\infty_1} = \infty_1 - \frac{1}{3}T'$, $\overline{\beta} = \beta_1 - \frac{1}{3}T'$ y así sucesivamente, siendo ∞, β y δ, ∞_1, β_1 y δ_1 etc. los errores de los tres ángulos de los triángulos y T,T',T'' .... sus sumas.

La probabilidad de los valores simultáneos de $\overline{\infty}$ y $\overline{\beta}$ es proporcional á

$$C^{-2\,h\,(\overline{\beta}+\frac{1}{2}\,\infty)^2 - \frac{3}{2}h\,\infty^2}$$

Si hacemos

$$\overline{\beta} + \frac{1}{2}\overline{\infty} = \frac{1}{2}\underline{\infty}\sqrt{3}$$

la exponencial anterior se convierte en

$$C^{-\frac{3}{2}h\,\overline{\infty}^2 - \frac{3}{2}h\,\underline{\infty}^2}.$$

Así, las leyes de probabilidad de los valores de $\overline{\infty}$ y $\overline{\beta}$ son las mismas y la función (0) tomará la forma

$$(0')\ r\,\underline{\infty} + r_1\overline{\infty} + r_2\,\underline{\infty}_1 + r_3\,\overline{\infty}_1 + \cdots\cdots$$

La probabilidad del error de esta función y, por consiguiente, de la función (0), está comprendida entre los límites $\pm s$ y será

$$\frac{2\int dt c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

tomándose la integral desde t nula hasta

$$t = s\sqrt{\frac{\frac{3}{2}h}{r^2+r_1^2+r_2^2+\ \cdots}}.$$

Se tiene evidentemente

$$p\,\overline{\infty} + q\overline{\beta} = [\,p - \tfrac{1}{2}q\,]\,\overline{\infty} + \tfrac{1}{2}q\,\underline{\infty}\sqrt{3}\ ;$$

la que da, igualándola á $r\,\underline{\infty} + r_1\overline{\infty}$,

$$r = \tfrac{1}{2}q\sqrt{3}\ ,\ r_1 = p - \tfrac{1}{2}q.$$

El valor de t será, pues, sustituyendo por h su valor: $\frac{3n}{2\theta^2}$, siendo n el número de triángulos y

$\theta^2 = T^2 + T_1^2 + \ldots\ldots + T_{n-1}^2$, errores de los triángulos,

$$\frac{3s}{2\theta}\sqrt{\frac{n}{p^2 - pq + q^2 + p_1^2 - p_1q_1 + q_1^2 + \ldots}}.$$

Ahora bien; si para verificar las operaciones se mide hácia la extremidad A_n del arco una segunda base, la expresión de su error, sacada de la cadena de triángulos y de la primera, será, por lo que precede, de la forma

$$[p] \qquad l\,\overline{\infty} + m\,\overline{\beta} + l_1\,\overline{\infty}_1 + m_1\,\overline{\beta}_1 + \ldots\ldots$$

Sea λ este error, que será conocido por la medida directa.

Si en la función [p] se hace como antes

$$\beta + \tfrac{1}{2}\,\overline{\infty} = \tfrac{1}{2}\,\underline{\infty}\sqrt{3},$$

tomará la forma

$$f\,\underline{\infty} + f_1\,\overline{\infty} + f_2\,\underline{\infty}_1 + f_3\,\overline{\infty}_1 + \ldots\ldots$$

Designando por s el valor de la función [0] ó de su equivalente [0'] y, si como ya dije, las probabilidades de $\underline{\infty}$ y $\overline{\infty}$ siguen la misma ley, siendo proporcionales á $c^{-\frac{3}{2}h\,\underline{\infty}^2}$ y $c^{-\frac{3}{2}h\,\overline{\infty}^2}$, la probabilidad de la función precedente será proporcional á

$$c^{-\frac{3}{2}h\,[\underline{\infty}^2 + \overline{\infty}^2 + \underline{\infty}_1^2 + \overline{\infty}_1^2 + \ldots\ldots]}.$$

Suponiendo la función igual á λ, esta exponencial se convierte en

$$c^{-\frac{3}{2}h\left[\left(\underline{\infty} - \frac{f\lambda}{F}\right)^2 + \left(\overline{\infty} - \frac{f_1\lambda}{F}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{\lambda^2}{F}\right]},$$

representando F la suma de los cuadrados $f^2 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots$

Los valores de $\underline{\infty}$, $\overline{\infty}$, $\underline{\infty}_1$, ... más probables, son evidentemente los que convierten en mínimo el exponente de esta exponencial, lo que da

$$\underline{\infty} = \frac{f\lambda}{F},\ \overline{\infty} = \frac{f_1\lambda}{F},\ \underline{\infty}_1 = \frac{f_2\lambda}{F}, \ldots\ldots$$

Si observamos que se tiene, como antes,

$$f = \tfrac{1}{2}\,m\sqrt{3},\quad f_1 = l - \tfrac{1}{2}\,m$$

será $$\overline{\beta} = \tfrac{1}{2}\, \infty \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\, \overline{\infty},$$

$$\infty = \frac{[l - \frac{1}{2} m]\, \lambda}{F}, \qquad \overline{\beta} = \frac{[m - \frac{1}{2} l]\, \lambda}{F},$$

$$\overline{\infty}_1 = [\, l_1 - \tfrac{1}{2}\, m_1\,]\, \frac{\lambda}{F}, \qquad \overline{\beta}_1 = \frac{[\, m_1 - \tfrac{1}{2}\, l_1\,]\, \lambda}{F},$$

....

será

$$F = l - m\, l + m^2 + l_1{}^2 - m_1\, l_1 + m_1{}^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Estos valores, sustituidos en la función (0), darán la corrección que deba sufrir el arco determinado; corrección resultante de la medida de la segunda base y que deberá afectarse de signo contrario.

Puede llegarse al mismo resultado directamente. En efecto; siendo s el valor de la función (0), su probabilidad, según ley deducida por el mismo Laplace, es proporcional á

$$C^{-\dfrac{\frac{3}{2}\, h \left[s - \lambda \frac{S\, r_n\, f_n}{S\, f_n{}^2} \right]}{S\, r_n^2 - \frac{(S\, r_n\, f_n)^2}{S\, f_n^2}}},$$

comprendiendo S todos los valores de n, desde n = 0 inclusivamente. El valor más probable de s es el que vuelve nulo el exponente de c, es decir,

$$s = \lambda \frac{S\, r_n\, f_n}{S\, f_n{}^2}$$

Es, pues, necesario quitar del arco medido $A\, A_1$ .... A_n este valor de s; y, si llamamos u el error del arco así corregido, la probabilidad de u será proporcional á

$$C^{-\dfrac{\frac{3}{2} h\, u^2}{S\, r_n^2 - \frac{(S\, r_n\, f_n)^2}{S\, f_n^2}}}$$

Por esta expresión se ve, que el *peso* del resultado se ha aumentado á causa de la medida de la segunda base, pues, antes de dicha medida, el coeficiente de $-s^2$ era, según se vió

$$\frac{\frac{3}{2} h}{S r_n{}^2},$$

y, á consecuencia de ella, el coeficiente de u^2 se convirtió en

$$\frac{\frac{3}{2} h}{S r_n{}^2 - \frac{[S r_n f_n]^2}{S f_n{}^2}}.$$

El mismo error se hizo, pues, menos probable por esta medida y por la corrección anterior del arco.

Es de observarse que los valores de r, r_n, f y f_n dan

$$r^2 + r_1 = p^2 - pq + q^2,$$

$$f^2 + f'_2 = l^2 - ml + m^2,$$

$$rf + r_1 f_1 = l\left[p - \tfrac{1}{2} q\right] + m\left[q - \tfrac{1}{2} p\right],$$

pudiéndose, por lo tanto, formar fácilmente $Sr_n{}^2$ y $Sr_n f_n$ por medio de los coeficientes de $\overline{\varpi}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\varpi}_1$,........ en las funciones (0) y [p].

La medida de esta segunda base puede servir, no sólamente para rectificar el arco medido, sino también para corregir la diferencia de longitud de sus puntos extremos ó sea el ángulo A_n. Para ello bastará sustituir en la función (0) la

$$\pm\left[\overline{\varpi} - \overline{\varpi}_1 + \overline{\varpi}_2 - \dots\dots\right],$$

que expresa el error de A_n; positivo, si n es ímpar y negativo si es par. Se tiene entonces

$$l = \pm 1, \quad m = 0, \quad l_1 = \mp 1, m_1 = 0 \dots\dots;$$

de donde, fácil es concluir que, para corregir el ángulo A_n, es necesario agregarle la cantidad

$$\frac{\mp \delta [\, l - l_1 + l_2 - \ldots\ldots - \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m_1 - \ldots\ldots \,]}{l^2 ml + m^2 + l_1{}^2 m_1 l_1 + m_1{}^2 + \ldots\ldots}$$

La probabilidad del error de A_n así corregido, estará dentro de los límites $\pm$ u y será

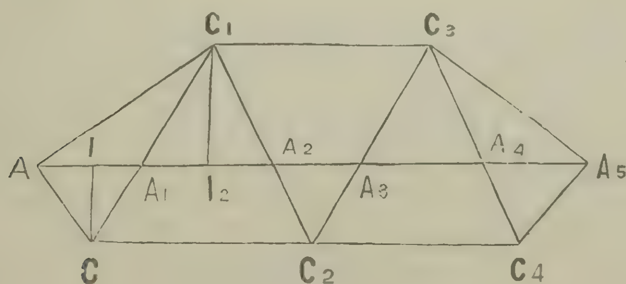
$$\frac{2 \int dt\ c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

estando tomada la integral desde t nula hasta

$$t = \frac{u \sqrt{\frac{3}{2} h}}{\sqrt{n - \frac{[\, l - l_1 + l_2 - \ldots\ldots - \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m - \ldots\ldots \,]^2}{l^2 m l + m^2 + l_1{}^2 \ldots\ldots}}}$$

A los resultados anteriores hemos llegado, partiendo de la ley de probabilidad del error ∞, proporcional á $C^{-h\infty^2}$ y bajo el supuesto de que dicha ley puede admitirse cuando los ángulos han sido repetidos. Podría demostrarse que tales resultados son los mismos, cualquiera que sea la ley de probabilidad del error ∞; pero el carácter sintético de este trabajo no me lo permito por razón de requerir un análisis prolongado y difícil.

Voy, pues, con un ejemplo dado por el mismo Laplace, y deducido de la aplicación de las fórmulas geodésicas anteriores, á poner de relieve la ventaja y superioridad del método expuesto.



Sea la recta AA_5, cuya longitud ha sido determinada por medio de la cadena de triángulos CC_1C_2, $C_1C_2C_3$, ... supuestos todos iguales é isósceles y tales que sus bases CC_2, C_1C_3, ... sean paralelas á la línea AA_5.

Supóngase que se haya medido una base AC situada de manera que el ángulo CAA_1 sea igual al ángulo CA_1A. El primero de esos ángulos determina la posición de la línea AA_1 con respecto á la base y se supone conocido.

Hagamos

$$\cot CAC_1 = \cot A + h,$$

$$\cot CC_1A = \cot A + h';$$

tendrémos, designando por *b* la base AC y por *a* la parte II_{n+1} del arco AA_{n+1},

$$h = \frac{b}{2\, a \operatorname{sen} A} - \frac{1}{\operatorname{sen} 2\, A}$$

$$h' = \frac{a}{2\, b \operatorname{sen} A \cos^2 A} - \frac{1}{\operatorname{sen} 2\, A}.$$

Supóngase, así mismo, que se mida hácia la última extremidad de la línea $A\,A_{n+1}$, otra base igual á la C A y colocada de modo que el ángulo $C_{n+1}\, C_n\, C_{n+2}$ sea igual al ángulo $C\, C_1\, A$ y el $C_n\, A_{n+2}\, C_{n+1}$ igual al $C\, A\, C_1$. Llamando ∞ y β los errores de los ángulos $C\, C_1\, A$ y $C\, A\, C_1$, ∞_{n+1} y β_{n+1} serán los de

$C_{n+1}\, C_n\, A_{n+2}$ y $C_n\, A_{n+2}\, C_{n+1}$ y la ecuación

$$C_{n+1}\, A_{n+2} = C_{n+1} C_n \frac{\operatorname{sen}\, C_{n+1}\, C_n\, A_{n+2}}{\operatorname{sen}\, C_{n+1}\, A_{n+1}\, C_n}$$

dará, siendo δ una variación relativa á estos errrores,

$$\frac{\delta\, C_{n+1}\, A_{n+2}}{C_{n+1}\, A_{n+2}} = \frac{\delta\, C_n\, C_{n+1}}{C_n\, C_{n+1}} + \infty_{n+1} \cot CC_1A$$

$$- \beta_{n+1} \cot C\, A\, C_1,$$

de donde

$$\frac{\delta\ C_{n+1} A_{n+2}}{C_{n+1} A_{n+2}} = [\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n - \infty_1 - \infty_2 - ... - \infty_n] \cot A$$

$$+ \beta [h + \cot A] - \infty [h' + \cot A]$$

$$+ \infty_{n+1} [h' + \cot A] - \beta_{n+1} [h + \cot A].$$

Lo que anteriormente llamamos l, l_1,......, m, m_1, . . . se convierte aquí en

$$l = -[1 + h'] b, \qquad m = [1 + h] b,$$

$$l_1 = -b, \qquad m_1 = b,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

$$l_n = -b, \qquad m_n = b,$$

$$l_{n+1} = [1 + h'] b, \qquad m_{n+1} = -[1 + h] b.$$

La cantidad llamada Sf_n^2 ó sea

$$l^2 - ml + m^2 + l_1^2 - m_1 l_1 + m_1^2 + \ldots\ldots$$

se convierte en

$$3 [n + 2] b^2 + 6 [h + h'] b^2 + 2 [h^2 + hh' + h'^2] b^2.$$

La cantidad llamada $Sr_n f_n$ ó

$$l [p - \tfrac{1}{2} q] + m [q - \tfrac{1}{2} p] + l_1 [p_1 - \tfrac{1}{2} q_1] + m_1 [q_1 - \tfrac{1}{2} p_1] + \ldots,$$

se vuelve, despreciando los términos que no tienen á n por coeficiente,

$$\frac{3 [n + 1] [n + 2]}{2} ab + 3 [n + 1] [h + h'] ab$$

$$+ [n + 1] [h^2 + hh' + h'^2] ab.$$

Representando, pues, por λ el exceso de la base medida $C_{n+1} A_{n+2}$ sobre la base calculada, se tendrá, lla-

mando s el exceso de la longitud verdadera de la línea AA_{n+1} sobre esta longitud calculada,

$$s = \frac{\lambda \, Sr_n \, f_n}{Sf_n^2} = \frac{[n+1]\, a \, \lambda}{2\, b}.$$

Es menester, pues, agregar á la longitud calculada de la línea AA_{n+1} el producto de λ por la relación de la mitad de esta línea á la base b; lo que equivale á calcular la primera mitad de la línea AA_{n+1} con la base AC y la segunda mitad con la base $A_{n+2}\, C_{n+1}$. Este procedimiento sería generalmente exacto, cualesquiera que fuesen el tamaño y disposición de los triángulos que uniesen las dos bases, si las partes de $Sr_n\, f_n^2$ y de Sf_n^2, correspondientes á estas mitades, fuesen respectivamente iguales.

Este método, empleado por la Comisión que fijó la longitud del metro, pareció entonces el más conveniente, aunque no hacía conocer la corrección de las diversas partes del arco total AA_{n+1}. Para ello es necesario corregir los ángulos de cada triángulo, ó determinar las correcciones ∞, β, ∞_1, β_1, ... que resultan del exceso λ de la segunda base observada sobre esta misma base, calculada por medio de la primera.

Hemos dado ya estas correcciones, suponiendo la ley de los errores de observación de los ángulos. proporcional á la exponencial $c^{-k\,[\infty + \frac{1}{3} T]^2}$, siendo k una constante, T la suma de los errores de tres ángulos del triángulo, $\infty + \frac{1}{3}$ T, y $\frac{1}{3}$ T — ∞ — β los errores de cada uno de los ángulos. Dijimos también: que la suposición de esta ley de probabilidad debe ser admitida cuando los ángulos han sido repetidos; y que entonces

$$\infty_s = \frac{l_s - \frac{1}{2} m_s}{F} \lambda, \qquad \beta_s = \frac{m_s - \frac{1}{2} l_s}{F} \lambda,$$

designando por F la suma de las cantidades $l^2_- ml + m^2$, $l_1^2 m_1 l_1 + l_1^2$, ... ; y vamos á demostrar aquí que estas correcciones tienen lugar cualquiera que sea la ley de probabilidades de los errores:

Al intento, Laplace designa esta ley por $\Psi[\propto + \frac{1}{3}T]^2$ y la supone la misma tanto para los errores positivos como para los negatioos, por lo que su expresión no debe contener sino potencias pares de los citados errores. La ley de probabilidad de los valores simultáneos de $\propto$ y de β será así, proporcional al producto

$$\Psi[\infty + \tfrac{1}{3}T]^2 \, \Psi[\beta + \tfrac{1}{3}T]^2 \, \Psi[\tfrac{1}{3}T - \infty - \beta]^2.$$

Si desarrollamos este producto, con respecto á las potencias de $\propto$ y de β y tomando hasta los cuadrados y hasta los productos de éstos, será

$$[\Psi(\tfrac{1}{9}T^2)]^3 + [\infty^2 - \infty\beta + \beta^2] \, \Psi[\tfrac{1}{9}T^2]$$
$$\times \left\{ 2\,\Psi(\tfrac{1}{9}T^2)\,\Psi'(\tfrac{1}{9}T^2) - \tfrac{4}{9}T^2[\Psi'(\tfrac{1}{9}T^2)]^2 \right.$$
$$\left. + \tfrac{4}{9}T^2\,\psi(\tfrac{1}{9}T^2)\,\psi''(\tfrac{1}{9}T^2) \right\},$$

representando $\psi'(x)$ á $\frac{d\psi(x)}{dx}$ y $\psi''(x)$ á $\frac{d\psi'(x)}{dx}$.

Si se supone que T varíe desde $-\propto$ hasta $T = \propto$, (*) se podrá multiplicar la función anterior por $d\,T$ é integrarla dentro de estos límites, con lo que se tendrá, para la probabilidad de los valores simultáneos de $\propto$ y β, una cantidad de la forma

$$H - H'(\infty^2 + \infty\beta + \beta^2),$$

y proporcional á

$$I - \frac{H'}{H}[\infty^2 + \infty\beta + \beta_2].$$

La probabilidad de la existencia simultánea de

(*) El signo ∞ significa infinito y en el resto del cálculo $\propto$.

$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \ldots\ldots$ será proporcional al producto de las cantidades

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2)$$

$$1 - \frac{H'}{H}[\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

El logaritmo de este producto, será, siendo *s* un número indeterminado

$$-\frac{H'}{H} S[\alpha_s^2 + \alpha_s\beta_s + \beta_s^2] - \ldots\ldots;$$

y llegará á su máximo si el término precedente llega á su mínimo, ó si la función

$$S(\alpha_s^2 + \alpha_s\beta_s + \beta_s^2)$$

es la más pequeña posible, satisfaciendo, además, α, β, α_1, ... á la ecuación

$$\lambda = l\alpha + m\beta + l_1\alpha_1 + m_1\beta_1 + \ldots\ldots$$

Esta función puede tomar la forma

$$\frac{1}{4} S\left\{\left[2\beta_s + \alpha_s - \frac{3 m_s \lambda}{2F}\right]^2 + \frac{3}{4}\left[\alpha_s - \frac{(l_s - \frac{1}{2} m_s)\lambda}{F}\right]^2\right\}$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{\lambda^2}{F}$$

y será evidentemente un mínimo cuando se suponga

$$2\beta_s + \alpha_s - \frac{3 m_s \lambda}{2F} = 0, \quad \alpha_s - \frac{[l_s - \frac{1}{2} m_s]\lambda}{F} = 0;$$

de donde se saca generalmente

$$\alpha_s = (l_s - \tfrac{1}{2} m_s)\frac{\lambda}{F}, \quad \beta_s = (m_s - \tfrac{1}{2} l_s)\frac{\lambda}{F}$$

En el caso que acabamos de considerar, se tiene

$$\alpha = -\frac{\lambda b}{F}\left[\frac{3}{2} + h' + \frac{1}{2}h\right], \quad \beta = \frac{\lambda b}{F}\left[\frac{3}{2} + h + \frac{1}{2}h'\right],$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = -\frac{3}{2}\frac{\lambda b}{F}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \frac{3}{2}\frac{b\lambda}{F}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\lambda b}{F}\left[\frac{3}{2} + h' + \frac{1}{2}h\right], \qquad \beta_{n+1} = -\frac{\lambda b}{F}\left[\frac{3}{2} + h + \frac{1}{2}h'\right];$$

por lo que y á causa de estas correcciones, todos los triángulos que no sean los que tienen á una de las bases por uno de sus lados, permanecerán rectángulos.

La probabilidad del error $\pm u$ de la línea $A A_{n+1}$ corregida por medio de la segunda base será, pues,

$$\frac{2 \int d t c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} ;$$

estando la integral tomada entre *t* nula y

$$t = \frac{3 u}{2 \rho} \sqrt{\frac{n+1}{Q \frac{(S r_n f_n)^2}{S f_n^2}}},$$

que se convierte aquí en

$$t = \frac{3 u}{2 \rho} \sqrt{\frac{n+1}{Q'}},$$

llamando Q' la función

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4} a^2 + \frac{3}{2} (n+1)^2 (h + h') a^2.$$
$$+ \frac{1}{2} (n+1)^2 (h^2 + hh' + h'^2) a^2.$$

Como los errores igualmente probables son proporcionales á las raíces cuadradas de Q y Q', se ve que éstas han disminuido y casi reducídose á su mitad por la medida de una segunda base.

La probabilidad de un error $\pm \lambda$ en la medida de una segunda base es, por lo que se dijo al principio.

$$\frac{2 \int d t c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} ,$$

estando la integral tomada desde *t* nula hasta

$$t = \frac{3 \lambda}{2 \theta} \sqrt{\frac{n+1}{S f_n^2}}$$

siendo f_n^2 igual á

$$(v)\ 3\ (n + 1)\ b^2 + 6\ (h + h')\ b^2 + 2\ (h^2 + hh' + h'^2)\ b^2$$

La parte del arco de meridiano que se extiende de Perpignan á Formentera, se apoya sobre una base medida cerca de Perpignan. Su longitud (del arco) es aproximadamente de 466 kilómetros y su extremo se junta á la base de Perpignan por una cadena de 26 triángulos. Damoiseau, aplicando á dicho arco la fórmula de probabilidad que hemos dado, encontró, tomando por unidad la base medida cerca de Perpignan, cuya extensión es de 11,706,^{m}40, (véase el principio)

$$(p')\ p^2 - p\,q + q^2 + p_1^2 - p_1\,q_1 + q_1^2 + \ldots\ldots$$
$$+ p_{25}^2 - p_{25}\,q_{25} + q_{25}^2 = 48350{,}606.$$

Si nos figuramos que la longitud de AA_{n+1} sea la de dicha parte de meridiano y con su longitud de 466006^m, tendrémos

$$a = \frac{466006}{26}.$$

Tomando, á la manera que poco ha se hizo, la base de Perpignan por unidad y suponiendo los triángulos isósceles CC_1C_2, $C_1C_2C_3$, ... rectángulos, lo que da tang A$=$ cot A$=$1, se encuentra,

$$Q = 48207{,}6,$$

representando Q la función (p'), convertida por Laplace en

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{2}\ a^2 \cot^2 A + 3\ (h+h')\ (n+1)^2\ a^2 \cot A$$
$$+ (h^2+hh'+h'^2)\ (n+1)^2\ a^2;$$

y, como según Damoiseau,

$$Q = 48350{,}6,$$

los errores de la medida entera estarán compren-

dides entre los límites $\pm$ 8,1, dado que los valores de Q son muy poco diferentes. En este concepto, el caso examinado representa perfectamente la medida del arco de meridiano comprendido desde la base de Perpignan hasta Formentera.

Si hacemos n=25, la función (v) se convierte en

$$86{,}8030\ b^2$$

y, por tanto, los errores igualmente probables en la medida AA_{n+1} y de una nueva base igual á la primera están en la relación de $\sqrt{Q}$ á $\sqrt{86.8030}$; de donde se sigue que el error de una nueva base estará comprendido entre los límites $\pm\ 0^m.34236$ ó, aproximadamente $\pm\ \frac{1^m}{3}$. Estos límites son los que resultan de los ángulos de 26 triángulos que unen la nombrada base de Perpignan con Formentera. Así, pues, el caso hipotético que se acaba de examinar está de acuerdo con el resultado de esa cadena de triángulos.

La solución expuesta, digna del autor de la "Mecánica Celeste" es, sin duda, la más rigurosa, á la vez que la más sabia que pueda imaginarse; sinembargo, considerando que en las buenas triangulaciones la discordancia de las bases es siempre muy pequeña, puede adoptarse la de Puissant, fundada toda en consideraciones elementales.

Representando por a la base del primer triángulo de una red; por A su ángulo opuesto, corregido conforme al teorema de Legendre; por a' el lado común á este triángulo y al segundo; por B el ángulo adyacente á la base a, opuesto á a' y corregido igualmente se tendrá

$$(1) \qquad a' = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}.$$

Si, del mismo modo, llamamos A' al ángulo opuesto á la base a' del segundo triángulo y B' al ángulo adyacente á esta base y opuestos al lado a'' buscado, será

$$a'' = \frac{a \text{ sen } B'}{\text{sen } A'}.$$

En general, si n es el número de triángulos de una red y $a^{[n]}$ el último lado buscado,

$$(2) \quad a^{[n]} = \frac{a \text{ sen } B \text{ sen } B' \text{ sen } B'' \ldots\ldots \text{ sen } B^{[n-1]}}{\text{sen } A \text{ sen } A' \text{ sen } A'' \ldots\ldots \text{ sen } A^{[n-1]}}.$$

Cuando este último lado, deducido de la base observada, difiera de su medida efectiva ∞ y que

$$\infty = a^{[n]} + \varepsilon^{[n]},$$

la diferencia $\varepsilon^{[n]}$ es el resultado de los errores que los ángulos A, A', ..., B, B', ..., han producido sobre los lados calculados a', a'', ...

Esta diferencia pudiera hacerse desaparecer con sólo alterar los ángulos de un triángulo de la cadena; pero, para ello, sería necesario que esos ángulos hubiesen sido observados en circunstancias atmosféricas muy desfavorables. En el caso, al contrario, en que todos los ángulos que entran en la expresión de $a^{[n]}$ merecieren, poco más ó menos, la misma confianza, natural es hacerlos concurrir á todos á la desaparición de $\varepsilon^{[n]}$ y aplicarles, en consecuencia, la misma corrección. Supongamos, pues, que los ángulos A, A', ... se disminuyan, cada uno, en x y los ángulos B, B',..... se aumenten en la misma cantidad, se tendrá exactamente

$$(2') \quad \infty = a^{[n]} + \varepsilon^{[n]} = \frac{a \text{ sen } [B + x] \text{ sen } [B' + x] \ldots \text{ sen } [B^{[n-1]} + x]}{\text{sen } [A - x] \text{ sen } [A' - x] \ldots \text{ sen } [A^{[n-1]} - x]}.$$

Tomando logaritmos, desenvolviendo en series y reduciendo por medio de la ecuación (2), se tendrá, aceptando hasta las primeras potencias de $\varepsilon^{[n]}$ y de x, lo que siempre es suficiente,

$$(3)\ \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x \begin{bmatrix} \cot A + \cot A' + \ldots\ldots + \cot A^{(n-1)} \\ + \cot B + \cot B' + \ldots\ldots + \cot B^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Más generalmente; para poner de acuerdo las dos bases, sean x, y, z las correcciones que deben hacerse á los ángulos A, B, C del primer triángulo: x', y', z' las que deben sufrir los del segundo; y así sucesivamente hasta el $n^{ésimo}$ triángulo, se tendrá

$$a^{(n)} + \varepsilon^{(n)} = \frac{a \operatorname{sen}(B+y) \operatorname{sen}(B'+y') \ldots\ldots \operatorname{sen}\left[B^{(n-1)} + y^{(n-1)}\right]}{\operatorname{sen}(A+x) \operatorname{sen}(A'+x') \ldots\ldots \operatorname{sen}\left[A^{(n-1)} + x^{(n-1)}\right]}$$

y, por tanto,

$$(4)\ \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = y \cot B + y' \cot B' + \ldots + y^{(n-1)} \cot B^{(n-1)}$$

$$- x \cot A - x' \cot A' - \ldots\ldots - x^{(n-1)} \cot A^{(n-1)}$$

y además

$$z = -x - y, \quad z' = -x' - y', \ldots\ldots, z^{(n-1)} = -x^{(n-1)} - y^{(n-1)},$$

puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo debe ser igual á dos rectos más el exceso esférico.

Pasando de la primera á la segunda base, la ecuación (3) dará la corrección x, que será positiva ó negativa, según que $\varepsilon^{(n)}$ sea por exceso ó por defecto; y si se quiere corregir uno de los lados intermedios, el quinto, por ejemplo, bastará hacer al índice $n = 5$ en esa misma ecuación, es decir, detenerse en el quinto triángulo de la red.

En general, cuando se conozca la corrección $\varepsilon^{(n)}$ del lado $a^{(n)}$, se tendrá

$$\log a^{(n)} \text{ corregido} = \log a^{(n)} + M \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}$$

siendo M el módulo tabular.

En el cálculo de una línea de corta extensión relativamente, ó de un arco de paralelo que atraviese una red trigonométrica, las partes de aquélla están comprendidas entre dos arcos de gran círculo, que pasan por los extremos de los lados a, a', a''......, $a^{(n)}$. Sean, pues, J, J', J'',...... , $J^{(n)}$ las porciones consecutivas de una misma línea, siendo evidente que la corrección de una de ellas será, según la hipótesis,

$$(5) \qquad \delta J^{(n)} = \frac{\varepsilon^{(n)} J^{(n)}}{a^{(n)}}$$

Así, cuando las bases colocadas en los extremos de una línea geodésica presenten entre sí una pequeña diferencia, se calculará separadamente δ J', δ J'', ... , $J^{(n)}$ y la suma de todas sus correcciones será la de la línea entera. Esta manera de corregir es, como se ve, aplicable á una parte cualquiera de la línea medida.

Si las condiciones de los triángulos fuesen tales que su forma sea próximamente equilateral, sería muy exacto suponer que el factor, que multiplica á x en el segundo miembro de la ecuación (3), se redujese á 2n cot 60°, con lo que la fórmula quedaría, expresando á x en segundos,

$$(6) \qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x\,(2n \cot 60°) \operatorname{sen} 1'';$$

de donde, siendo todo conocido,

$$(7) \qquad x = \frac{\varepsilon^{(n)} \operatorname{tang} 60°}{2n\, a^{(n)} \operatorname{sen} 1''}$$

Examinando la cuestión bajo un punto de vista más general, notaré que, puesto que los triángulos son tanto mejores cuanto más pequeño es el error T de la suma de los tres ángulos sobre dos rectos más el exceso esférico, será aproximarse á la doctrina de las probabilidades, suponer que las correcciones x, y, x', y', . . . consideradas antes, son proporcionales á los errores T, T', ... Laplace ha probado que el medio más ventajoso de repartir los errores T, T',. ......, en cada triángulo, es distribuirlos por terceras partes en cada ángulo. Haciendo, pues,

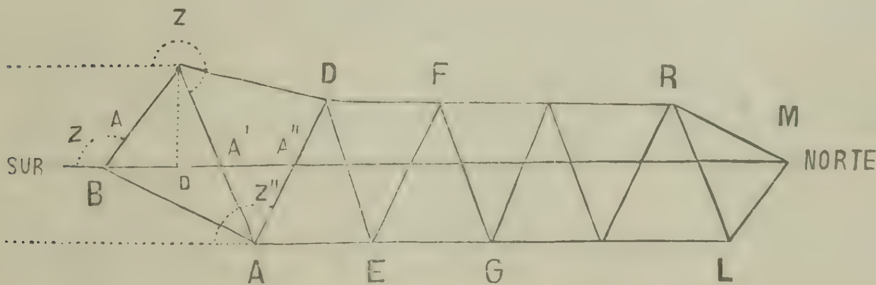
$$x = y = q\,\tfrac{1}{3}\,T.$$
$$x' = y' = q\,\tfrac{1}{3}\,T',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

la fórmula (4) se convertirá en

$$(8)\qquad \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = \tfrac{1}{3}\,q \left[\begin{array}{l} -T\cot A - T'\cot A' - \ldots\ldots \\ +\,T\cot B + T'\cot B' + \ldots\ldots \end{array}\right]$$

en la cual q es una constante fácil de determinar, puesto que es la única desconocida.

Ahora, si BM es una línea meridiana medida



por medio de la red BCRM y que Z, Z', Z'', ...,$Z^{(n)}$ sean los azimuts de los lados a, a', a'' ...., $a^{(n)}$, contados del Sur hácia el Oeste, fácilmente se hallará su-

poniendo los meridianos paralelos en la estrecha zona ocupada por los triángulos y considerando los ángulos esféricos,

$$Z' = 180° + Z - C + x + y, \qquad Z'' = Z - C + C' + x + y - x' - y'$$

$$Z''' = 180° + Z - C + C' - C'' + x + y - x' - y' + x'' + y'',$$

y así sucesivamente. Las correcciones de los ángulos azimutales serán, por tanto,

$$\delta Z' = x + y, \quad \delta Z'' = x + y - x' - y', \qquad \delta Z''' = x + y - x' - y' + x'' + y''$$

....

$$\delta Z^{(n)} = x - x' + x'' - x''' \dots \dots \pm x^{(n-1)} + y - y' + y'' - y''' \dots\dots \pm y^{(n-1)};$$

y la fórmula (5) que habíamos encontrado en la hipótesis de ser $\delta Z' = \delta Z'' = \dots\dots\dots = 0$, será reemplazada por la siguiente:

$$(9) \qquad \frac{\delta J^{(n)}}{J^{(n)}} = \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} - \text{tang } Z^{(n)} . \ \delta Z^{(n)},$$

que dará la corrección de una parte cualquiera $J^{(n)}$ del arco medido y, por consiguiente, de su totalidad.

Se deriva esta corrección de la diferencial de $J^{(n)} = -a^{(n)} \cos Z^{(n)}$. Si se tratase, por el contrario, de un arco de paralelo, se tendría, conservando la misma notación,

$$\frac{\delta J^{(n)}}{J^{(n)}} = \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} + \cot Z^{(n)} . \ \delta Z^{(n)}.$$

La fórmula (8) entraría naturalmente en la (3), si todos los triángulos fuesen equilaterales ó si todos los

errores T, T', ... fuesen nulos; pero estos dos casos no tienen verificativo jamás en la práctica. Se nota, además, que según esta manera de corregir, los triángulos que den $T = o$, permanecerán intactos; y que, para ponerse de acuerdo con el principio de la homogeneidad, el primer miembro de la ecuación (8) deberá dividirse por *sen* 1'' y el valor de $\delta Z^{(n)}$ en la (9) deberá multiplicarse por *sen* 1''.

Fácil es legitimar el empleo de éste y el anterior procedimiento por medio del análisis de probabilidades, puesto que la función (4) puede ponerse bajo la forma

$$\frac{\varepsilon^{(h)}}{a^{(n)}} = lx + my + l'x' + m'y' + \ldots\ldots,$$

dando á l, m, l', m', etc., valores iguales á los coeficientes de x, y, x', y' ...... en dicha función y haciendo

$$\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = \varepsilon \text{ y designando por F la función}$$

$$l^2 - m\,l + m^2 + l'^2 - m'l' + m'^2 + \ldots\ldots,$$

la probabilidad de un error $\pm \varepsilon$ en la segunda base, deducida de la primera, sería la misma que dije ya al explicar la solución de Laplace.

Otro tanto sucede con el error medio del último azimut $Z^{(n)}$ de una cadena de triángulos, á causa de ser

$$\delta Z^{(n)} = (x + y) - (x' + y') + \ldots \pm [x^{(n-1)} + y^{(n-1)}]$$

$$\text{ó} \quad \delta Z^{(n)} = p\,x + q\,y - p'\,x' - q'\,y' + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Haciendo $p = q = 1$, $p' = q' = -1$, ..., el valor medio de $\delta Z^{(n)}$, que llamarémos v será

$$v = \tfrac{3}{4} \sqrt{T^2 + T'^2 + \ldots\ldots + T^{(n)}} = \tfrac{3}{4}\,\theta\,,$$

en que θ^2 es la suma de los cuadrados de los errores de *n* triángulos.

Las fórmulas de Mr. Puissant tienen el inconveniente de incluir, como factor, una suma algebraica de *cotangentes*, haciéndolas impropias para el cálculo logarítmico, siendo preciso, ó tener una tabla de cotangentes naturales ó deducirlas de sus valores logarítmicos con un aumento considerable de trabajo. El geógrafo mexicano Díaz Covarrubias las ha sustituido por otras, exentas de aquel defecto y que paso á explicar.

Pongamos el primer miembro de la ecuación (2') bajo la forma $a^{(n)}\left(1+\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}\right)$: tomemos los logaritmos en las ecuaciones (2) y (2') cambiada ésta, como hemos dicho: llamemos $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ para los ángulos en A y B respectivamente, las diferencias logarítmicas por 1'', tales como se encuentran en las tablas de los senos: combinemos las (2) y (2') así transformadas; y desarrollemos el binomio lagarítmico que resulta en el primer miembro hasta el segundo término solamente, puesto que $\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}$ es siempre muy pequeño, y se tendrá, introducieudo el módulo tabular y despejando á x

$$(10)\quad x = (6{,}63778)\frac{\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n},$$

en la que la cantidad numérica entre paréntesis es el logaritmo de la constante 4342945.

Si la diferencia resultante en el último lado es muy pequeña y si todos los triángulos son bien configurados, la fórmula (10) pudiera modificarse, suponiendo todos los ángulos de 60°, ya que así las diferencias logarítmicas tendrán 12.15 por valor medio, y la fórmula se cambiaría en

$$(11)\qquad x = (5{,}25217)\,\frac{\varepsilon^{(n)}}{n\,a^{(n)}},$$

siendo, como antes, la cantidad entre paréntesis el logaritmo de un factor constante.

Vamos ahora á ver cómo se pueden corregir los cálculos preliminares de la red. Costumbre es la de repetirlos, después de hacer á los ángulos las correcciones indicadas por las fórmulas antedichas ú otras equivalentes; pero Covarrubias crée "que sus ecuaciones permiten operar con más rapidez y evitar la monotonía del cálculo trigonométrico usual, lo que por cierto no es indiferente cuando se trata de un gran número de triángulos." La ecuación (10) da

$$(12) \quad \varepsilon^{(n)} = (3.6222)\, a^{(n)}\, x\, (\infty_1 + \infty_2 + \ldots + \infty_n + \beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_n$$

que puede servir para encontrar la corrección de un lado cualquiera, independiente de las demás y sin peligro de que una equivocación influya en todos los lados, como sucede á menudo en los cálculos trigonométricos.

Advertiré que las correcciones de los lados, que no han servido de bases para calcular otros triángulos, se harán, sin las diferencias logarítmicas ∞, puesto que el tercer ángulo de cada triángulo ha permanecido invariable.

Se puede también, y es á las veces más cómodo, corregir directamente el logaritmo de cada uno de los lados, por ser

$$\log (a^{(n)} + \varepsilon^{(n)}) = \log a^{(n)} + M\, \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}\,.$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $\varepsilon^{(n)}$ (12), resultará :

$$(13) \qquad \log (a^{(n)} + \varepsilon^{(n)}) = \log a^{(n)} + 0.0000001\, x\, S_n,$$

en la que $a^{[n[}$ ha sido eliminada, representando S la suma de las diferencias logarítmicas hasta el orden n de triángulos.

Esta manera de operar, ventajosa por su exactitud, da inmediatamente el logaritmo del lado correcto; logaritmo necesario para cálculos posteriores.

Muchas veces, por necesidad ó equivocación, se hacen cálculos partiendo de un valor aproximativo de la base y se obtienen para los lados valores también aproximados. Con el objeto de corregir la cadena sin repetir el cálculo, sea, con Covarrubias, C el factor de a en la ecuación (2) supuesto constante, por admitirse que los ángulos han sido ya corregidos y sus valores tenidos como definitivos, según lo que precede, con lo que dicha ecuación será:

$$a^{[n]} = a\, C;$$

pero como la verdadera longitud de la base es $a + c$, la corrección correspondiente al lado calculado $a^{[n]}$ deberá hacerse, resultando:

$$a^{[n]} + c^{[n]} = (a + c)\, C.$$

Si eliminamos C, será:

$$c^{[n]} = a^{[n]} \frac{c}{a}; \qquad (13)$$

de donde se deduce que las correcciones son proporcionales á las distancias. El cálculo de la fórmula anterior es muy sencillo, por ser el factor $\frac{c}{a}$ constante; sin embargo, más fácil es corregir los logaritmos por la ecuación siguiente, deducida de las anteriores:

$$\log\, (a^{(n)} + c^{(n)}) = \log\, a^{(n)} + (9.93778)\frac{c}{a}, \qquad (15)$$

quedando todo reducido á sumar á cada logaritmo una constante.

Por lo común, la incertidumbre final en la base de comprobación no llega á 0,0002, siendo evidente que no podrá ni deberá tomarse dicho límite como invariable,

puesto que los errores crecerán en general con el número de los triángulos. Ahora, para una cadena compuesta de 30 á 40 triángulos, calculada en dos partes que tienen común el lado de prueba, el límite mencionado es muy grande, porque supone una diferencia de 1 metro en 2500, cosa que no puede nunca suceder, salvo que los errores angulares sean muy fuertes ó que sean constantes. Generalmente, y á ello conduce el estudio de la influencia de los errores de observación, se considera que en una red trigonométrica no hay sino errores fortuitos; consideración fundada en el hecho de que la suma de los errores por exceso respecto á 180°, es casi igual á los por diferencia y que el número de triángulos en los que se verifica lo primero, es casi el mismo de los en que se verifica lo segundo. De aquí, si llamamos m el valor medio del error angular, con abstracción del signo respectivo: ω el error angular medio final, considerando los signos: ε_1 y ε_2 respectivamente, las sumas de los errores positivos y negativos; y R la relación entre los números de triángulos n_1 y n_2, cuyos errores son de signo diferente, se tendrá en los n triángulos de la red:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3\,n}, \quad \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3\,n}, \quad R = \frac{n_1}{n_2};$$

y, por consiguiente, cuando $\omega = o$ y $R = 1$, el fundamento para considerar los errores como fortuitos, será muy eficaz.

Para concluir, advertiré que el procedimiento último, aunque sabio y de indisputable precisión, no podrá aplicarse á trabajos de importancia trascendental, como los verderamente geodésicos, y sí á topográficos, de alguna extensión, así por su exacti-

tud como por la muy grande aproximación, de sus resultados.

Siento que la premura del tiempo, lo mismo que la falta de datos nacionales no me permitan entrar en ulteriores consideraciones sobre la interesante cuestión, que tan á la ligera he tratado é ilustrar las teorías con ejemplos prácticos, dando con ellos una idea del modo de efectuar los cálculos y el método de disponerlos para evitarse equivocaciones y ayudarse en su ejecución, con economía de tiempo y de trabajo.

NOTA.— El signo λ significa *lambda* y el ε *epsilon*.

PROPOSICIONES.

TOPOGRAFÍA. — Desarrollo elemental de la fórmula $x = h \tan \alpha$ de la nivelación trigonométrica.

DIBUJO TOPOGRÁFICO.— Lavado.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.— Dada una recta sobre un plano, construir sobre ella un triángulo equilátero, rebatiendo por cambio y giro.

TRIGONOMETRÍAS.—Exceso esférico. Fórmula de L'Huilier.

GEOMETRÍA ANALÍTICA.— Asíntotas no paralelas á los ejes.

ALGEBRA SUPERIOR.— Teorema de Sturm.

AGRIMENSURA LEGAL. Excesos sobre áreas tituladas.

CÁLCULO DIFERENCIAL.— Encontrar los máximos y los mínimos de la función:

$$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 66x^2 - 72x + 84.$$

Máximos y mínimos de las funciones de una sóla variable.

CÁLCULO INTEGRAL.— Encontrar la función primitiva de $\int\left(\frac{a \cos^2 x + b \operatorname{sen} x + c}{\cos^2 x}\right)dx$.—Integración por descomposición.

GEODESIA.—Area de una zona del elipsoide terrestre.

ASTRONOMÍA.— Hallar la diferencia de longitud entre dos puntos por medio de distancias lunares.